کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ –فنی (۶ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۲-۱۳۹۱** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۱/۱۰/۲۰** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- انتگرال دوگانه $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\cos^{-1}y} \frac{dx\,dy}{1+\sin x}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲- اگر D ناحیه محدود به $y=x\,,\ y=2x\,,\ y^3=x^2\,,\ y^3=4x^2$ باشد
انتگرال دوگانه مقابل را محاسبه کنید : $\iint_D \frac{1}{y}dxdy$ **۱۵ نمره**

سوال۳- اگر $R=\{(x,y,z):1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$ انتگرال سه‌گانه زیر را محاسبه کنید :

$$\iiint_R \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

۱۵ نمره

سوال۴- اگر $f=xy+yz+zx$ و $\vec{F}=(x^2y\,,\,y^2z\,,\,z^2x)$ مطلوب است حاصل : **۱۵ نمره**
الف) $grad(div\vec{F})$ ب) $curl(grad\ f)$ ج) $curl(curl\,\vec{F})$

سوال۵- C قسمتی از منحنی $x=e^{t^2}\,,\ y=\sqrt{1-t^2}\,,\ z=\ln(t+1)$ به ازای $0\le t\le 1$ است.
انتگرال منحنی‌الخط زیر را محاسبه کنید : **۲۰ نمره**

$$\int_C (2xy+4yz)dx+(x^2+4xz-2z^2)dy+(4xy-4yz)dz$$

سوال۶- حجم جسم محدود به رویه $z=\ln(4+x^2+y^2)$، استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $z=0$ را بدست آورید. **۲۰ نمره**

سوال۷- V ناحیه محدود به کره $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ و واقع در بالای صفحه $z=1$ است.
اگر S سطح خارجی آن باشد و $\vec{F}=(x+e^z\,,\,y+1+\cos z\,,\,2z+1)$ ، مقدار انتگرال
$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

سوال۱- ترتیب انتگرالگیری را عوض می‌کنیم.

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{\cos^{-1}y}\frac{dx\,dy}{1+\sin x}=\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{\cos x}\frac{dy\,dx}{1+\sin x}=\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{y}{1+\sin x}\Big|_{0}^{\cos x}dx=\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\ln(1+\sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$$

سوال۲- از تغییر متغیر $v=\frac{y}{x}$ و $u=\frac{y^3}{x^2}$ استفاده می کنیم داریم $y=\frac{u}{v^2}$ و $x=\frac{u}{v^3}$ می توان دید که $dxdy=\frac{u}{v^6}dudv$

اکنون داریم :

$$\iint_D\frac{1}{y}dxdy=\iint_D\frac{v^2}{u}\frac{u}{v^6}dudv=\int_{v=1}^{2}\int_{u=1}^{4}\frac{1}{v^4}dudv=\int_{v=1}^{2}\frac{3}{v^4}dv=-\frac{1}{v^3}\Big|_{1}^{3}=\frac{26}{27}$$

سوال۳- انتگرال را در دستگاه مختصات کروی حل می کنیم

$$\iiint_R\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=1}^{2}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi}}d\rho d\varphi d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=1}^{2}\rho\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{3}{2}d\varphi\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{3\pi}{2}d\theta=3\pi^2$$

سوال۴- داریم : $curl\,\vec{F}=(-y^2,-z^2,-x^2)$ ، $div\vec{F}=2xy+2yz+2zx$ ، $grad\ f=(y+z,z+x,x+y)$

الف) $grad(div\vec{F})=(2y+2z,2z+2x,2x+2y)$

ب) $curl(grad\ f)=(0,0,0)$ ج) $curl(curl\,\vec{F})=(2z,2x,2y)$

سوال۵- تابع برداری $\vec{F}=(2xy+4yz,x^2+4xz-2z^2,4xy-4yz)$ را در نظر می گیریم. مشاهده می کنیم که $curl\,\vec{F}=(0,0,0)$ یعنی انتگرال منحنی الخط $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر است و تابع f و جود دارد بطوریکه $\vec{F}=\nabla f$.

تابع f را می‌توان یافت : $f=x^2y+4xyz-2yz^2$

اگر نقطه A ابتدای مسیر در لحظه $t=0$ باشد آنگاه $A=(1,1,0)$ و نقطه B انتهای مسیر در لحظه $t=1$ باشد آنگاه $B=(e,0,\ln 2)$

و مقدار انتگرال برابر است با :

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=f(B)-f(A)=0-1=-1$$

سوال۶- به کمک انتگرال دوگانه یا سه‌گانه می توان دید که حجم ناحیه مورد نظر برابر است با $V=\iint_{x^2+y^2\le 1}\ln(4+x^2+y^2)dxdy$

این انتگرال را در دستگاه مختصات قطبی حل می کنیم

$$V=\iint_{x^2+y^2\le 1}\ln(4+x^2+y^2)dxdy=\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}r\ln(4+r^2)d\theta\,dr$$

$$=2\pi\int_{r=0}^{1}r\ln(4+r^2)\,dr=\pi[(4+r^2)\ln(4+r^2)-r^2]_{r=0}^{1}=\pi(5\ln 5-4\ln 4-1)$$

سوال۷- S یک سطح بسته است و شرایط قضیه واگرایی (دیورژانس) برقرار است بنابر این : $\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V div\vec{F}dV$

اما $div\vec{F}=4$ یعنی :

$$\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V 4dV=4\iiint_V dV=4\times\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$$